數學傳播 49卷4期, pp. 147-155

橢圓的切線與法線引出的高次曲線

陳 都

1. 前言

文 [1]～[6] 對橢圓的切線與法線的性質進行了全面細緻的研討, 得到了一系列有趣的結論。本文將對橢圓的切線和法線有關的三個軌跡問題展開新的探索, 發現了三條優美對稱的高次曲線 (切垂線、法垂線及法中線) 和相關長度、距離公式, 最後得到了與法垂線、法中線密切關聯的橢圓曲星線 (即漸屈線)、曲星圓和法中橢圓的優美性質。

過橢圓上任一點, 可以作它在該點處的切線和法線, 其中法線總與橢圓相交, 法線被橢圓截下的線段叫做該橢圓的法弦。

引理: 設 $P(m,n)$ 是橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 上一點, 記 $c^2=a^2-b^2$, 則橢圓在點 P 處的切線方程和法線方程依次爲 $\dfrac{mx}{a^2}+\dfrac{my}{b^2}=1$, $\dfrac{a^2x}{c^2m}-\dfrac{b^2y}{c^2n}=1$.

證明: 若 $mn\neq 0$ 時, 橢圓切線和法線的斜率均存在, 根據對稱性, 這裡只考慮橢圓的上半部分。由橢圓方程得, $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, 求導 $y'=-\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$, 所以, 橢圓在點 $P(m,n)$ 處切線的斜率

$$k=y'\Big|_{x=m}=-\frac{b}{a}\cdot\frac{m}{\sqrt{a^2-m^2}}=-\frac{b}{a}\cdot\frac{m}{an/b}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{m}{n}\quad(n>0),$$

由點斜式, 得

$$y-n=-\frac{b^2m}{a^2n}(x-m),\quad 即\ \frac{mx}{a^2}+\frac{ny}{b^2}=\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2},$$

而點 $P(m,n)$ 在橢圓上, 有 $\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}=1$, 所以, 橢圓在點 P 處的切線方程爲 $\dfrac{mx}{a^2}+\dfrac{ny}{b^2}=1$. 又法線在點 $P(m,n)$ 處的斜率爲 $\dfrac{a^2n}{b^2m}$, 由點斜式, 得 $y-n=\dfrac{a^2n}{b^2m}(x-m)$, 所以, 橢圓在點 P 處的法線方程爲 $\dfrac{a^2x}{c^2m}-\dfrac{b^2y}{c^2n}=1$.

當 m、n 之一爲 0 時, 上列切線方程和法線方程仍然有效。

因此, 橢圓在點 P 處的切線方程和法線方程分別爲 $\dfrac{mx}{a^2}+\dfrac{ny}{b^2}=1$, $\dfrac{a^2x}{c^2m}-\dfrac{b^2y}{c^2n}=1$.

2. 橢圓的切垂線

下面, 我們以上述引理爲依據, 對與橢圓的切線和法線有關的軌跡問題進行全面而深入探究。

定理1: 設 P 是橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 上一點, 過坐標原點 O 作 P 點切線的垂線 OD, 垂足爲 D, 則點 D 的軌跡方程爲 $(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2$.

證明: 設 $P(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$, 由引理得, 過點 P 的切線方程: $b\cos\alpha\cdot x+a\sin\alpha\cdot y=ab$, 垂線 OD 的方程爲 $a\sin\alpha\cdot x-b\cos\alpha\cdot y=0$, 聯立上列二直線方程, 解得

$$x=\frac{ab^2\cos\alpha}{a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha},\quad y=\frac{a^2b\sin\alpha}{a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha},$$

以上兩式相除, 有 $\tan\alpha=\dfrac{by}{ax}$, 從而,

$$\sec\alpha=\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}=\pm\frac{\sqrt{a^2x^2+b^2y^2}}{ax},$$

而 $x=\dfrac{ab^2\cos\alpha}{a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha}=\dfrac{ab^2\sec\alpha}{a^2\tan^2\alpha+b^2}$,

把 $\tan\alpha=\dfrac{by}{ax}$ 和 $\sec\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{a^2x^2+b^2y^2}}{ax}$, 代入

上式得 $x\Big(a^2\cdot\dfrac{b^2y^2}{a^2x^2}+b^2\Big)=ab^2\Big(\pm\dfrac{\sqrt{a^2x^2+b^2y^2}}{ax}\Big)$,

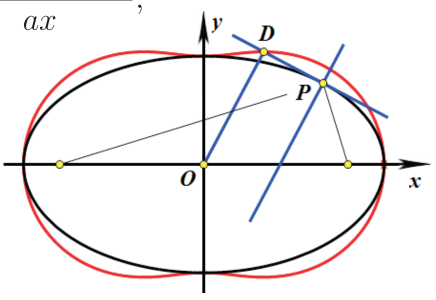

圖1

整理, 得到垂足 D 的軌跡方程: $(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2$.

顯然, 這是一個簡明對稱的二元四次方程, 當橢圓的離心率 $e>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 時, 其圖形如圖 1 所示。由於該四次曲線是橢圓中心向其切線所作垂線的垂足 D 的軌跡, 故稱之爲橢圓的切垂線。

3. 橢圓的法垂線

定理2: 設 P 是橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 上一點, 過坐標原點 O 作 P 點法線的垂線 OH, 垂足爲 H, 則點 H 的軌跡方程爲: $(x^2+y^2)^2(b^2x^2+a^2y^2)=c^4x^2y^2$.

證明: 設 $P(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$, 由引理得, 過點 P 的法線方程: $a\sin\alpha\cdot x-b\cos\alpha\cdot y=$

$c^2\sin\alpha\cos\alpha$, 垂線 OH 的方程爲 $b\cos\alpha\cdot x+a\sin\alpha\cdot y=0$, 聯立上列二直線方程, 解得

$$x=\frac{ac^2\sin^2\alpha\cos\alpha}{a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha},\quad y=-\frac{bc^2\sin\alpha\cos^2\alpha}{a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha},$$

以上兩式相除, 有 $\tan\alpha=-\dfrac{bx}{ay}$, $\cot\alpha=-\dfrac{ay}{bx}$,

$$\therefore\ \sin\alpha=\frac{1}{\csc\alpha}=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}}=\pm\frac{bx}{\sqrt{b^2x^2+a^2y^2}},$$

而

$$x=\frac{ac^2\sin^2\alpha\cos\alpha}{a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha}=\frac{ac^2\sin\alpha}{a^2\tan\alpha+b^2\cot\alpha},$$

所以,

$$x\Big(a^2\cdot\frac{-bx}{ay}+b^2\cdot\frac{-ay}{bx}\Big)=ac^2\Big(\pm\frac{bx}{\sqrt{b^2x^2+a^2y^2}}\Big),$$

整理, 得到垂足 H 的軌跡方程: $(x^2+y^2)^2(b^2x^2+a^2y^2)=c^4x^2y^2$.

這是比較簡單的六次曲線, 圖形如圖 2 所示, 蠻漂亮哦, 好像一朵幸運的四瓣玫瑰花, 但它是一條新發現的六次曲線, 並不是大家熟悉的四葉玫瑰線。由於該曲線是橢圓中心向其法線所作垂線的垂足 H 的軌跡, 故稱之爲橢圓的法垂線。

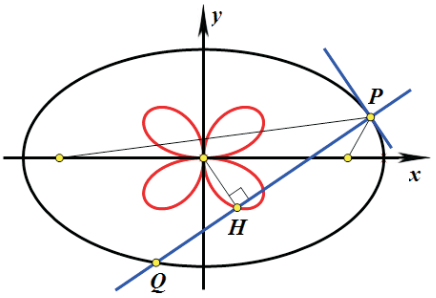

圖 2

4. 橢圓的法中線

定理 3: 設 P 是橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 上一點, 過點 P 的法線 PQ 交橢圓於另一點 Q, 法弦 PQ 的中點爲 M, 則 M 點的軌跡方程爲: $(b^2x^2+a^2y^2)^2(b^6x^2+a^6y^2)=a^4b^4c^4x^2y^2$.

證明: 設 $P(a\cos\alpha,b\sin\alpha)$, 由引理得, 過點 P 的法線方程: $a\sin\alpha\cdot x-b\cos\alpha\cdot y=c^2\sin\alpha\cos\alpha$, 即

$$y=\frac{a\sin\alpha\cdot x-c^2\sin\alpha\cos\alpha}{b\cos\alpha}=\frac{ax-c^2\cos\alpha}{b}\cdot\tan\alpha=\frac{ax}{b}\tan\alpha-\frac{c^2}{b}\sin\alpha.$$

將上式代入橢圓方程 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, 消去 y, 得

$$b^4x^2+a^2(ax-c^2\cos\alpha)^2\tan^2\alpha=a^2b^4,$$

即 $(a^4\tan^2\alpha+b^4)x^2-2a^3c^2x\sin\alpha\tan\alpha+a^2c^4\sin^2\alpha-a^2b^4=0$, 根據韋達定理, 有

$$x_1+x_2=\frac{2a^3c^2\sin\alpha\tan\alpha}{a^4\tan^2\alpha+b^4}=\frac{2a^3c^2\sin^2\alpha\cos\alpha}{a^4\sin^2\alpha+b^4\cos^2\alpha},$$

從而,

$$\begin{aligned}y_1+y_2&=\frac{a}{b}(x_1+x_2)\tan\alpha-\frac{2c^2\sin\alpha}{b}\\&=\frac{a}{b}\cdot\frac{2a^3c^2\sin^3\alpha}{a^4\sin^2\alpha+b^4\cos^2\alpha}-\frac{2c^2\sin\alpha}{b}\\&=\frac{2c^2\sin\alpha}{b}\Big(\frac{a^4\sin^2\alpha}{a^4\sin^2\alpha+b^4\cos^2\alpha}-1\Big)\\&=-\frac{2b^3c^2\sin\alpha\cos^2\alpha}{a^4\sin^2\alpha+b^4\cos^2\alpha},\end{aligned}$$

由中點公式, 得橢圓法弦 PQ 中點 $M(x,y)$ 的軌跡方程:

$$x=\frac{a^3c^2\sin^2\alpha\cos\alpha}{a^4\sin^2\alpha+b^4\cos^2\alpha},\quad y=-\frac{b^3c^2\sin\alpha\cos^2\alpha}{a^4\sin^2\alpha+b^4\cos^2\alpha}.$$

上列兩式相除, 得

$$\tan\alpha=-\frac{b^3x}{a^3y},\quad \cot\alpha=-\frac{a^3y}{b^3x},$$

$$\therefore\ \sin\alpha=\frac{1}{\csc\alpha}=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}}=\pm\frac{b^3x}{\sqrt{b^6x^2+a^6y^2}},$$

而

$$x=\frac{a^3c^2\sin^2\alpha\cos\alpha}{a^4\sin^2\alpha+b^4\cos^2\alpha}=\frac{a^3c^2\sin\alpha}{a^4\tan\alpha+b^4\cot\alpha},$$

$$\therefore\quad x\Big(a^4\cdot\frac{-b^3x}{a^3y}+b^4\cdot\frac{-a^3y}{b^3x}\Big)=a^3c^2\Big(\pm\frac{b^3x}{\sqrt{b^6x^2+a^6y^2}}\Big),$$

整理, 得到法弦中點 M 的軌跡方程:
$(b^2x^2+a^2y^2)^2(b^6x^2+a^6y^2)=a^4b^4c^4x^2y^2$.

很明顯, 上列中點軌跡方程比定理 1、2 中的垂足軌跡方程要複雜, 其圖形如圖 3 所示。由於該六次曲線是橢圓法弦中點 M 的軌跡, 故稱之爲橢圓的法中線。

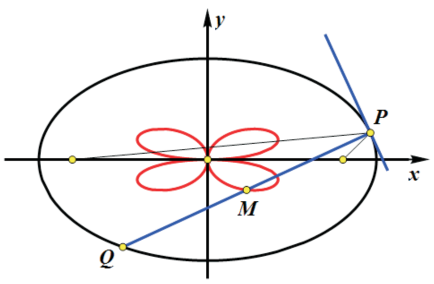

圖 3

5. 橢圓的法弦長

定理 4: 設 $P(a\cos\alpha,b\sin\alpha)$ 是橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 上一點, 過點 P 的法線

PQ 交橢圓於另一點 Q, 則法弦 PQ 的長

$$l=\frac{2ab(a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha)^{3/2}}{a^4\sin^2\alpha+b^4\cos^2\alpha}.$$

證明: 先求半弦長 PM. 因橢圓法弦 PQ 中點 $M(x,y)$ 的坐標:

$$x=\frac{a^3c^2\sin^2\alpha\cos\alpha}{a^4\sin^2\alpha+b^4\cos^2\alpha},\quad y=-\frac{b^3c^2\sin\alpha\cos^2\alpha}{a^4\sin^2\alpha+b^4\cos^2\alpha}.$$

由兩點之間的距離公式, 得

$$PM^2=\Big(\frac{a^3c^2\sin^2\alpha\cos\alpha}{a^4\sin^2\alpha+b^4\cos^2\alpha}-a\cos\alpha\Big)^2+\Big(\frac{b^3c^2\sin\alpha\cos^2\alpha}{a^4\sin^2\alpha+b^4\cos^2\alpha}+b\sin\alpha\Big)^2,$$

兩項各自通分後, 平方, 這兩項之分母相同, 均爲 $(a^4\sin^2\alpha+b^4\cos^2\alpha)^2$,

$$\begin{aligned}\text{分子}=&(a^3c^2\sin^2\alpha\cos\alpha-a^5\sin^2\alpha\cos\alpha-ab^4\cos^3\alpha)^2\\&+(b^3c^2\sin\alpha\cos^2\alpha+b^5\sin\alpha\cos^2\alpha+a^4b\sin^3\alpha)^2\\=&(-a^3b^2\sin^2\alpha\cos\alpha-ab^4\cos^3\alpha)^2+(a^2b^3\sin\alpha\cos^2\alpha+a^4b\sin^3\alpha)^2\\=&a^2b^4\cos^2\alpha(a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha)^2+a^4b^2\sin^2\alpha(a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha)^2\\=&a^2b^2(a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha)^3\end{aligned}$$

$$\therefore\ PM=\frac{ab(a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha)^{3/2}}{a^4\sin^2\alpha+b^4\cos^2\alpha},$$

因此, 法弦長 $l=\dfrac{2ab(a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha)^{3/2}}{a^4\sin^2\alpha+b^4\cos^2\alpha}$.

顯然, 當切點 P 爲長軸端點時, l 取得最大值 $2a$, 但是, 當切點 P 爲短軸端點時, l 取得最小值 $2b$ 嗎? 回答是否定的。

推論 1: 設橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的法弦 PQ 的長爲 l, 則

(1) 當 $e\in\Big(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big]$ 時, $l_{\min}=2b$;

(2) 當 $e\in\Big(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\Big)$ 時, $l_{\min}=\dfrac{3\sqrt{3}a^2b^2}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$.

證明: 橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的法弦長

$$l=\frac{2ab(a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha)^{3/2}}{a^4\sin^2\alpha+b^4\cos^2\alpha}.$$

對 $l(\alpha)$ 求導, 得

$$l' = \frac{2abc^2\sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}(a^4\sin^2\alpha + b^4\cos^2\alpha - 2a^2b^2)\sin 2\alpha}{(a^4\sin^2\alpha + b^4\cos^2\alpha)^2}.$$

(1) 若 $e \le \sqrt{2}/2$, 當 $\alpha = 0$、π 時, l 取得最大值 $2a$, 當 $\alpha = \pi/2$、$3\pi/2$ 時, l 取得最小值 $2b$;

(2) 若 $e > \sqrt{2}/2$, 當 $\alpha = 0$、π 時, l 取得極大值 $2a$, 當 $\alpha = \pi/2$、$3\pi/2$ 時, l 取得極大值 $2b$, 最大值爲 $2a$, 當 $\cos^2\alpha = \dfrac{a^2(a^2-2b^2)}{a^4-b^4}$ 時, l 取得極小值 $\dfrac{3\sqrt{3}a^2b^2}{(a^2+b^2)^{3/2}}$, 這個極小值也是最小值。

如圖 4, 當 $a = 5$、$b = 3$, 此時, $e = 4/5 > \sqrt{2}/2$, 算得 $l_{\min} \approx 5.8972022781$, 小於 $2b = 6$, 這與測量結果高度一致。

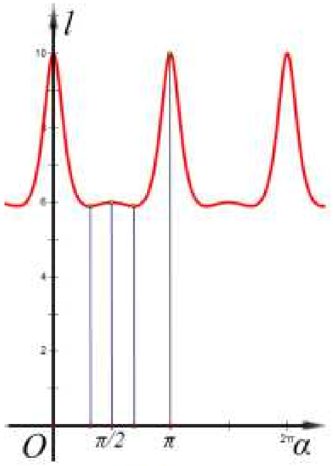

圖 4

6. 橢圓的法垂線長

定理 5: 設 $P(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$ 是橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ 上任一點, 過原點 O 作 P 點的法線 PQ 之垂線, 垂足爲 H, 則垂線段 OH 的長

$$d = \frac{c^2|\sin 2\alpha|}{2\sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}}.$$

證明: 由引理知, 過點 $P(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$ 的法線方程爲

$$a\sin\alpha\cdot x - b\cos\alpha\cdot y - c^2\sin\alpha\cos\alpha = 0,$$

根據點到直線的距離公式, 立得原點 O 到法線 PQ 之距離

$$d = \frac{c^2|\sin 2\alpha|}{2\sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}}.$$

推論 2: 設橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$, 原點 O 到過點 P 的法線 PQ 之距爲 d, 則 $d_{\max} = a - b$.

證明: 顯然, 當 $\alpha = k\cdot\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$ 時, d 取得最小值 0. 考慮到對稱性, 不妨設 $\alpha\in[0, \pi/2)$, 於是,

$$d = \frac{c^2\sin 2\alpha}{2\sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}},$$

對 $d(\alpha)$ 求導, 得

$$\begin{aligned}d' &= \frac{c^2[4\cos 2\alpha(a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha)-c^2\sin^2 2\alpha]}{4(a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha)^{3/2}}\\ &= \frac{c^2\{2\cos 2\alpha[a^2(1-\cos 2\alpha)+b^2(1+\cos 2\alpha)]-c^2(1-\cos^2 2\alpha)\}}{4(a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha)^{3/2}}\\ &= \frac{c^2[c^2\cos^2 2\alpha-2(a^2+b^2)\cos 2\alpha-c^2]}{4(a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha)^{3/2}}.\end{aligned}$$

令 $d'=0$, 得 $c^2\cos^2 2\alpha-2(a^2+b^2)\cos 2\alpha+c^2=0$, 這是關於 $\cos 2\alpha$ 的一元二次方程, 其判別式

$$\Delta=[-2(a^2+b^2)]^2-4c^4=16a^2b^2,$$

所以,

$$\cos 2\alpha=\frac{2(a^2+b^2)\pm 4a^2b^2}{2c^2}=\frac{(a\pm b)^2}{a^2-b^2}$$

$$\therefore\ \cos 2\alpha=\frac{a+b}{a-b}\ (\text{捨去}),\quad \text{或}\ \cos 2\alpha=\frac{a-b}{a+b}.$$

$$\text{由}\ \cos 2\alpha=\frac{a-b}{a+b},\ \text{得}\ \sin^2\alpha=\frac{b}{a+b},\ \cos^2\alpha=\frac{a}{a+b},\ \sin 2\alpha=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}.$$

可以判定, 此時, d 取得極大值, 也是最大值。把上列三式代入 d 的表達式, 得

$$d_{\max}=a-b.$$

當 $a=5$、$b=3$, 得 $d_{\max}=2$, 這與測量結果完全相符。

7. 橢圓的曲星線和曲星圓

如圖 5, 稱過原點作法線的垂線的垂足軌跡爲橢圓的法垂線, 法弦中點軌跡爲橢圓的法中線。由於橢圓星形線 (曲率圓心軌跡, 即漸屈線) 是其法線族的包絡線, 立得如下有趣

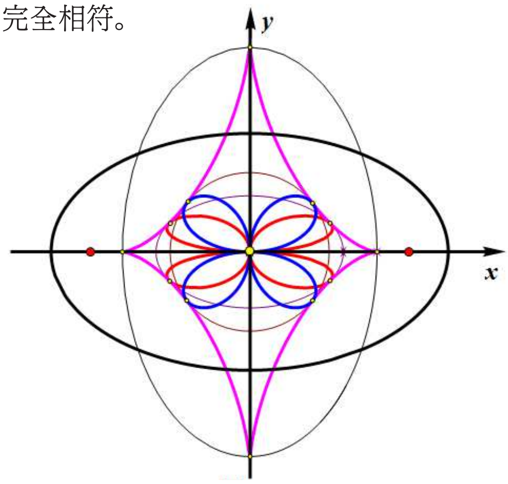

圖 5

推論 3: 橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0$, 記 $c^2=a^2-b^2)$, 的法垂線和法中線均內切於橢圓星形線 $\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{(c^2/a)^{\frac{2}{3}}}+\dfrac{y^{\frac{2}{3}}}{(c^2/b)^{\frac{2}{3}}}=1$.

這條曲線是大家熟知的, 考慮到橢圓星形線是其曲率中心的軌跡, 不妨稱之爲橢圓的曲星線, 稱曲星線的內切圓爲原橢圓的曲星圓。易得如下

推論 4: 橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的曲星線的周長和面積依次爲

$$4(a^3-b^3)/ab,\ 3\pi(a^2-b^2)^2/8ab.$$

推論 5: 設橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的曲小圓 (曲率半徑最小的圓)、曲大圓 (曲率半徑最大的圓) 的半徑依次爲 r、R, 則其曲星線周長爲 $4(R-r)$.

推論 6: 曲星線的外接橢圓方程爲 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\Big(\dfrac{a^2-b^2}{ab}\Big)^2$, 該橢圓與原橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 相似, 相似比爲 $\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}$.

推論 7: 橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$, 的曲星圓半徑爲 $a-b$, 該圓及法垂線與曲星線的四個切點坐標爲 $\pm(a-b)\sqrt{\dfrac{a}{a+b}}$, $\pm(a-b)\sqrt{\dfrac{b}{a+b}}$. 稱法中線的外切橢圓爲原橢圓的法中橢圓。

推論 8: 法中橢圓的方程爲 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\Big(\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\Big)^2$, 該橢圓與原橢圓相似, 相似比爲 $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

推論 9: 法中橢圓及法中線與曲星線的四個切點坐標爲 $\pm\dfrac{a^2c^2}{(a^+b^2)^{3/2}}$, $\pm\dfrac{b^2c^2}{(a^+b^2)^{3/2}}$.

推論 10: 如圖 6 所示, 橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的正交法線 PA、PB 與橢圓切於 A、B 兩點, 點 A、B 處的法線正交於點 Q, 則 Q 點的軌跡方程爲

$$(x^2+y^2-a^2-b^2)\Big(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\Big)^2+4(x^2+y^2)\Big(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\Big)-\frac{4(x^2+y^2)^2}{a^2+b^2}=0.$$

相應曲線內切於橢圓的曲星線

$$\frac{x^{\frac{2}{3}}}{(c^2/a)^{\frac{2}{3}}}+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{(c^2/b)^{\frac{2}{3}}}=1.$$

自然地, 我們可以對雙曲線、拋物線進行同樣的探討, 得到類似結論。限於篇幅, 這裡不贅, 留給感興趣的讀者。

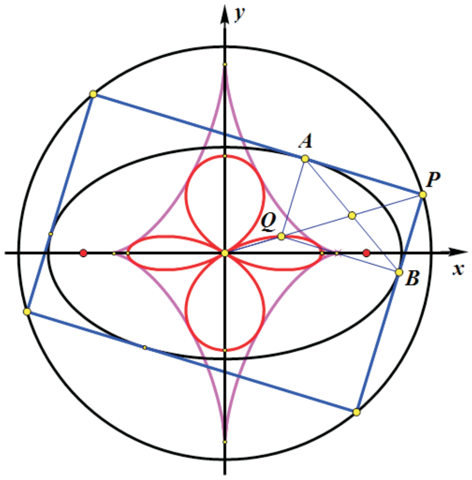

圖 6

參考文獻

1. 杜林會。橢圓切線的幾個性質及作法[J]。數學通報, 2003, 6。
2. 周建華。圓錐曲線切線的一個有趣的性質[J]。數學通報, 2003, 12。
3. 楊波。有心圓錐曲線的一個性質及應用[J]。數學通報, 2005, 3。
4. 徐文春。關於有心圓錐曲線切線的一組性質[J]。數學通訊, 2012, 12。
5. 曾建國。有心圓錐曲線切線的一個性質的推廣[J]。數學通訊, 2013, 5。
6. 楊誌明。一個關於有心圓錐曲線切線的猜想的否定與修正[J]。數學通訊, 2013, 10。

—本文作者任教中國湖南省祁東縣文武學校普高部—

勘誤表

第 44 卷 4 期, 第 91 頁 Line -5。
原爲：簡體字的「也就是说當銳角 」。
應爲：正體字的「也就是說當銳角」。

第 48 卷 2 期, 第 26 頁。
原爲：標題「第五節 總結 (相對論原理與光速恆定原理的相容性)」。
應爲：文字字體要放大。

第 49 卷 1 期, 第 38 頁。
原爲：$\triangle CDB$ 也都必須等於
應爲：$\triangle CDB$ 的內角和也都必須等於

第 49 卷 2 期, 第 17 頁 Line 8。
原爲：腳色。
應爲：角色。

第 49 卷 3 期, 第 87 頁 Line -17。
原爲：心浮氣燥。
應爲：心浮氣躁。